

Yéssica P. Velasco B.

**NATACIÓN EN SUPERFICIES CURVAS:
UNA JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA**



**Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias Básicas
Programas de Matemáticas con énfasis en Estadística
Ibagué, septiembre de 2017**

Natación en superficies curvas: una justificación matemática

**Trabajo de grado para optar al título de
profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística**

Yéssica P. Velasco B., código 070200112012

Director

Leonardo Solanilla Ch.

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad del Tolima

Facultad de Ciencias básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística

Ibagué, septiembre de 2017



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: NATACIÓN EN SUPERFICIES CURVAS: UNA JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR: YESSICA PAOLA VELASCO BONILLA. Cód. 070200112012

DIRECTOR: LEONARDO SOLANILLA

JURADOS: JOSE HERMAN MUÑOZ ÑUNGO
JUAN PABLO YAÑEZ P.

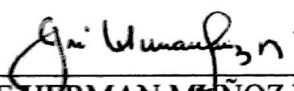
CALIFICACIÓN: 4.0

☒ APROBÓ

☐ REPROBÓ

OBSERVACIONES: Meritorio.

FIRMAS



JOSE HERMAN MUÑOZ ÑUNGO


JUAN PABLO YAÑEZ P.

Jurado 1

Jurado 2


LEONARDO SOLANILLA
Director del Trabajo


LEONARDO DUVAN RESTREPO A.
Director del Programa

FORMULARIO PARA EVALUACIÓN DE TRABAJOS DE GRADO

HOJA No. 2

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: JOSE HERMAN MUÑOZ ÑUNGO

NOTA OTORGADA POR EL JURADO cuatro - ocho (4.8)FIRMA DEL JURADO J. Herman Muñoz Ñung

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: JUAN PABLO YAÑEZ P.

NOTA OTORGADA POR EL JURADO cuatro - ocho (4.8)FIRMA DEL JURADO Juan Pablo Yañez P.

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO:

cuatro - ocho (4.8)

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

Calificación menor de tres cero (3.0)

REPROBADO

Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9)

APROBADO

Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4.)

SOBRESALIENTE

Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9)

MERITORIO

Calificación de cinco cero (5.0)

LAUREADO

FECHA DE SUSTENTACIÓN

30-NOVIEMBRE-2017

AGRADECIMIENTOS

Éste trabajo de investigación fue una gran experiencia y como toda experiencia se presentan obstáculos en el camino, pero es allí donde aparecen personas que te fortalecen y con un gran apoyo moral te ayudan a superarlos. Primeramente, mi agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto, a DIOS.

Especial reconocimiento para el caballerísimo Dr. Leonardo Solanilla Chavarro, director de tesis, por hacer posible la realización de este estudio, por su paciencia, tiempo, dedicación y por compartir su gran conocimiento de la manera más humilde, ha sido un privilegio contar con su guía y ayuda, además por haberme conllevado hacia mi compañero de tesis, William Clavijo a quien expreso mis agradecimientos también por su apoyo incondicional en el desarrollo del presente trabajo, fue un gran placer haber trabajado con tan bella persona que al pasar del tiempo se convirtió en un gran amigo.

Quisiera hacer extensiva mi gratitud a la mujer de mi vida, al mas hermoso ser que Dios me pudo regalar, a la mujer que nunca dejó de confiar en mí, al motor de mi existir, mi señora madre Carmen Bonilla, sus alentadoras y sabias palabras fueron de gran ayuda para mí.

También quiero dar las gracias a Jesus Maria Ayala por su apoyo incondicional, su sabiduría fue reflejada en el proceso de toda mi carrera.

Muy agradecida con la Universidad del Tolima, mi segundo hogar.

Gracias a todas esas personas que de alguna u otra forma me ayudaron en este proceso como:Stefanny Serna, Emma Cupitra, luisa Montoya y especialmente a Marcel Lozano Cruz. Un agradecimiento muy especial merece la comprensión, paciencia y el ánimo recibidos de mi familia y amigos.

A todos ellos, muchas gracias.

RESUMEN. De acuerdo con la Mecánica Clásica, en el plano euclidiano no es posible obtener traslación de un cuerpo a partir del reposo sin la presencia de fuerzas externas. En una superficie riemanniana cualquiera, esto sí puede suceder. En este trabajo de grado, que es puramente matemático, demostraremos –bajo ciertas suposiciones simplificadoras– cómo es que este fenómeno ocurre. También probaremos que la magnitud de la traslación, en tales circunstancias, es proporcional a la curvatura gaussiana de la superficie. Para tal fin, estudiamos el movimiento de ciertos sistemas cuasirígidos de partículas en una vecindad pequeña de superficie riemanniana arbitraria. En ellos ocurre el efecto natación: cierto movimiento cíclico produce traslación efectiva en ausencia de fuerzas externas.

ABSTRACT. According to classical mechanics, in the Euclidean plane it is impossible to get a nonzero amount of translation from rest for a body without external forces. On an arbitrary Riemannian surface, this may happen. In this undergraduate thesis, which is purely mathematical, we will prove –under simplifying assumptions– how this phenomenon takes place. Under the same hypotheses, we will also prove that the amount of translation is proportional to the Gaussian curvature. To this end, we study the motion of certain quasi-rigid particle systems in a small neighborhood of an arbitrary Riemannian surface. A swimming effect occurs: certain cyclical movement produces effective translation in the absence of external forces.

The amount of translation depends on the intrinsic curvature of the manifold.

Jack Wisdom en

Swimming in Spacetime: Motion by Cyclic Changes in Body Shape (2003)

Índice general

Introducción	8
1. Prólogo: cuerpos deformables	10
1.1. Primer sistema	10
1.2. Segundo sistema	14
2. Cinemática gauge	18
2.1. Espacio de configuración	18
2.2. Sistema (rana) y espacio de forma	20
3. Dinámica gauge	24
3.1. Lagrangiano y acción mínima	24
3.2. Teorema de Noether	25
4. Convención gauge	29
4.1. Nuevo sistema (lagartija)	29
4.2. Linealización	32
5. Epílogo: curvatura gaussiana	35
5.1. Salida del reposo	35
5.2. Curvatura geodésica	37
Bibliografía	41

Índice de figuras

1. Prólogo: cuerpos deformables	10
1.1. Primer sistema.	11
1.2. Convención y transformación gauge.	13
1.3. Segundo sistema.	14
1.4. Espacio de forma con curva de Jordan $C = \partial\Omega$	17
2. Cinemática gauge	18
2.1. Dos maneras de entender la vecindad normal V	20
2.2. Cuerpo deformable o rana.	21
2.3. Espacio de forma para la rana.	22
3. Dinámica gauge	24
4. Convención gauge	29
4.1. Lagartija.	30
4.2. Espacio de forma para la lagartija.	31
5. Epílogo: curvatura gaussiana	35

Introducción

La cita anterior de Wisdom (2003) plantea el problema de aclarar la dependencia entre la magnitud de la traslación y la curvatura gaussiana de una superficie cuando se realiza un movimiento cíclico de cierto sistema, en ausencia de fuerzas externas. Algunas pistas se tienen ya. En el trabajo de Cuellar (2015) se intentó, pero no se pudo demostrar en general que se trata de una proporcionalidad directa (allí sólo se consideraron la esfera y las superficies de revolución). Y, en verdad, la intuición sugiere que habrá más traslación cuando haya más curvatura. En este trabajo de grado proponemos una simplificación del problema que produce la deseada dependencia lineal de la curvatura.

En el primer capítulo estudiamos un par de ejemplos de sistemas cuasirígidos con el propósito de establecer los conceptos que se deben definir matemáticamente para estudiar la dinámica que nos ocupa. Tales conceptos comprenden el espacio de configuración, el espacio de forma, la convención gauge, el potencial gauge, entre otros. El segundo capítulo está dedicado a las especificaciones de espacio de configuración, espacio de forma y velocidades de las masas puntuales para un primer sistema, al que llamamos rana. El tercer capítulo estudia la dinámica de este sistema con ayuda del formalismo lagrangiano y el Teorema de Noether. Se obtiene una expresión general para la rana que puede explicar la magnitud de traslación en el caso simple de la esfera. Como esta aproximación al problema no es útil para todos los casos, en el capítulo cuarto proponemos otro sistema, que llamamos lagartija. A él damos el mismo tratamiento dinámico y obtenemos un sistema de dos

ecuaciones diferenciales ordinarias que involucra las coordenadas de forma y las coordenadas de configuración. En este momento fundamental, ante la dificultad de separar las variables, optamos por una aproximación numérica al problema. Esto nos lleva a una linealización simplificante del sistema original. Con ella, en el quinto y último capítulo, logramos demostrar, en toda generalidad, la existencia de una magnitud efectiva de la traslación junto con la dependencia directa de dicha traslación con respecto a la curvatura gaussiana.

El principal mérito de este trabajo ha consistido en dar un tratamiento novedoso al problema estudiado. No se conoce una fuente bibliográfica que contenga el mismo resultado, con el mismo nivel de generalidad. Por cierto, las herramientas usadas son las más sencillas posibles, a saber: los resultados más básicos de la Geometría Diferencial de las superficies riemannianas.

CAPÍTULO 1

Prólogo: cuerpos deformables

El propósito de este capítulo es mostrar un par de ejemplos en los que se evidencia la manera cómo la Geometría Diferencial es útil al momento de escoger una configuración adecuada para describir el movimiento de un cuerpo deformable o flexible. En efecto, el problema físico exige inicialmente encontrar un sistema de coordenadas conveniente para la descripción de dicho movimiento. Tal adecuación tiene que ver con la simplicidad de la descripción y con el descubrimiento de ciertos invariantes del movimiento. Los ejemplos que siguen han sido tomados de Littlejohn & Reinsch (1997). Los seguimos muy de cerca, aunque con una notación y una presentación más matemáticas.

1.1. Primer sistema

Consideremos un cuerpo formado por dos varillas rígidas sin masa significativa que están conectadas en uno de sus extremos o junta, como se muestra en la Figura 1.1. Las dos varillas tienen longitud l y masas iguales m en sus extremos libres (o sea, donde no va la junta). La junta está anclada en el origen del espacio o sistema inercial plano usual. Los puntos de tal espacio se describen mediante coordenadas cartesianas rectangulares x, y . Diremos que el cuerpo resultante tiene forma de V o, simplemente, que

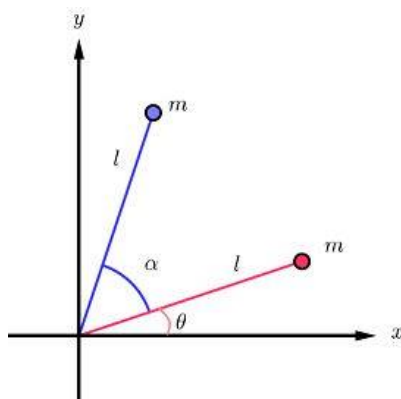


Figura 1.1: Primer sistema.

es una V . Suponemos también que dicha V tiene músculos –o algo similar– que hace que ella cambie de forma abriéndose o cerrándose un ángulo α . Más precisamente, asumimos que dichos motores o músculos no producen torques externos, de tal suerte que el momento angular del sistema se conserva.

¿Cómo describir el movimiento de esta V ? La respuesta no es del todo obvia. Después de meditar un poco, notamos que la configuración se puede determinar mediante dos ángulos α, θ . Diremos que el ángulo α , la apertura de la V , es una coordenada de forma; mientras que θ , el ángulo entre el eje x y una de las varillas, es una coordenada de orientación. Una vez escogida la varilla que determina θ , ya no se puede cambiar –o sea, las varillas son distinguibles. Así, $\alpha \in [0, 2\pi)$ y el “espacio de forma” es una circunferencia descrita por la coordenada α . Esta coordenada es independiente de la coordenada de orientación. En concordancia, dos “configuraciones” de la V tienen la misma forma si existe una rotación rígida del plano que transforma una configuración en la otra (es decir, si son congruentes módulo $SO(2)$).

Pasemos al estudio del movimiento. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ las coordenadas de las posiciones de las masas en el sistema inercial. El momento angular del

sistema solamente tiene una componente perpendicular al plano

$$L = m \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 \end{vmatrix},$$

donde las barras denotan determinantes y los puntos derivadas. Luego de multiplicar por dt , se obtiene que la forma diferencial

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2 = 0. \quad (1.1)$$

El significado de esta expresión encierra una restricción dinámica entre las posiciones de las masas y sus incrementos infinitesimales como consecuencia de la anulación del momento angular.

Con ayuda de las coordenadas de forma y de orientación la expresión se simplifica considerablemente. En efecto, al poner $x_1 = l \cos \theta$, $y_1 = l \sin \theta$, $x_2 = l \cos(\theta + \alpha)$, $y_2 = l \sin(\theta + \alpha)$. Por lo tanto, $dy_1 = l \cos \theta d\theta$, $dx_1 = -l \sin \theta d\theta$,

$$dy_2 = l \cos(\theta + \alpha) d\theta + l \cos(\theta + \alpha) d\alpha$$

y $dx_2 = -l \sin(\theta + \alpha) d\theta - l \sin(\theta + \alpha) d\alpha$. De esta forma, (1.1) se reduce a

$$2l^2 d\theta + l^2 d\alpha = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad d\theta = -\frac{1}{2} d\alpha,$$

en virtud de la identidad pitagórica. Ahora, esta expresión muestra como el cambio infinitesimal $d\alpha$ de la forma resulta en un cambio infinitesimal $d\theta$ de la orientación, cuando el momento angular se anula. Las interpretaciones física y geométrica son simples: cuando $L = 0$, la bisectriz del ángulo de apertura α de la V permanece constante mientras α crece o decrece. Así, la mitad del incremento en α corresponde a una varilla (digamos en sentido horario) y la otra mitad a la otra varilla (digamos en sentido antihorario).

Para el propósito de este trabajo es útil observar que, tras integrar,

$$\theta = -\frac{1}{2}\alpha + \text{constante}.$$

De esta manera, si α recorre un ciclo cerrado, lo mismo hace θ . En sistemas más complejos esto no sucede, como veremos más en el segundo ejemplo.

También conviene notar que es posible interpretar el ángulo θ como un ángulo de rotación que aplica los ejes del espacio inercial ciertos ejes del cuerpo fijos al cuerpo. Esto se puede entender con ayuda de la Figura 1.2. Llamaremos a estos ejes ξ, v y podemos hacer que el eje ξ yazca sobre la

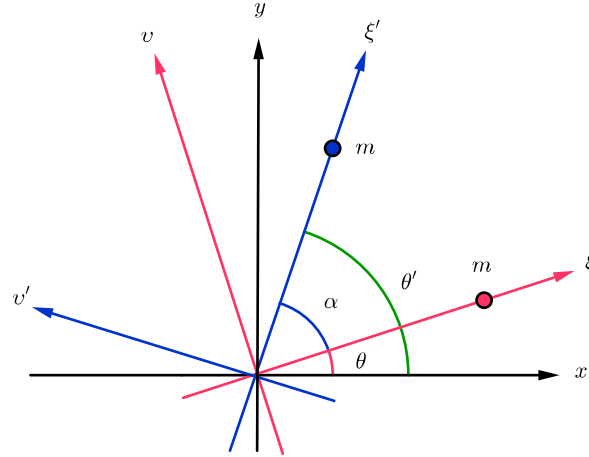


Figura 1.2: Convención y transformación gauge.

primera varilla. Sin embargo, hubiésemos podido tomar ejes ξ', v' de tal manera que v' yazca sobre la segunda varilla (ver Figura 1.2). De esta manera, la rotación que relaciona el sistema inercial con los ejes del cuerpo queda determinada por otro ángulo θ' , tal que

$$\theta' = \theta + \alpha. \quad (1.2)$$

Es decir, convenimos en fijar un sistema de ejes fijos sobre el cuerpo flexible o deformable. Tal convención se llama una “convención gauge”. Las transformaciones (1.2) que expresan el cambio de convención se llaman “transformaciones gauge”. Las convenciones no deben afectar los resultados (físicos o matemáticos) y así, tales resultados deben ser invariantes bajo las transformaciones gauge. Aquí, α es una cantidad invariante bajo tales transformaciones, mientras que θ sí depende de ellas.

1.2. Segundo sistema

Con el fin de estudiar una situación más compleja y más acorde al propósito del trabajo, consideremos un sistema formado por tres varillas de longitud l sin masa significativa, las cuales tienen masas iguales m fijas en uno de sus extremos. El sistema está anclado al origen de un sistema inercial o espacio x, y , tal como se muestra en la Figura 1.3. Esta vez hay dos juntas: una

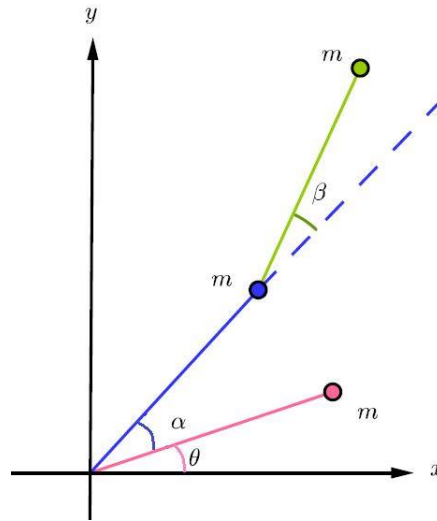


Figura 1.3: Segundo sistema.

entre la primera y la segunda de las varillas; la otra entre la segunda y la tercera. En las juntas hay músculos, pero el momento angular se conserva, tal como antes.

La configuración es parecida. La coordenada de orientación θ sigue siendo el ángulo entre el eje x y la primera varilla. Esta vez, sin embargo, hay dos coordenadas de forma, α y β : los ángulos en las juntas. El espacio de forma se puede así entender como el cuadrado plano $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ o, más elegantemente, como un toro (cuando se identifican los lados opuestos del cuadrado, v. Figura 1.4). De esta forma, dos coordenadas α (respectivamente, β) se consideran iguales si son congruentes módulo 2π .

El momento angular total de este sistema es

$$L = m \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ \dot{x}_3 & \dot{y}_3 \end{vmatrix},$$

en el cual los subíndices indican respectivamente las coordenadas espaciales de las tres masas. En consecuencia,

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2 + x_3 dy_3 - y_3 dx_3 = 0. \quad (1.3)$$

Esta relación expresa una restricción para las coordenadas espaciales y sus diferenciales.

La relación entre estas coordenadas cartesianas y aquellas de forma y orientación es $x_1 = l \cos \theta$, $y_1 = l \sin \theta$, $x_2 = l \cos(\theta + \alpha)$, $y_2 = l \sin(\theta + \alpha)$, $x_3 = l \cos(\theta + \alpha) + l \cos(\theta + \alpha + \beta)$, $y_3 = l \sin(\theta + \alpha) + l \sin(\theta + \alpha + \beta)$. Así, $dy_1 = l \cos \theta d\theta$, $dx_1 = -l \sin \theta d\theta$, $dy_2 = l \cos(\theta + \alpha) d\theta + l \cos(\theta + \alpha) d\alpha$, $dx_2 = -l \sin(\theta + \alpha) d\theta - l \sin(\theta + \alpha) d\alpha$,

$$dy_3 = dy_2 + l \cos(\theta + \alpha + \beta) d\theta + l \cos(\theta + \alpha + \beta) d\alpha + l \cos(\theta + \alpha + \beta) d\beta,$$

$$\text{y } dx_3 = dx_2 - l \sin(\theta + \alpha + \beta) d\theta - l \sin(\theta + \alpha + \beta) d\alpha - l \sin(\theta + \alpha + \beta) d\beta.$$

Sustituyendo en (1.3), luego de ciertas operaciones elementales,

$$(4 + \cos \beta) d\theta + (3 + 2 \cos \beta) d\alpha + (1 + \cos \beta) d\beta = 0 \text{ ssi } d\theta = -A d\alpha - B d\beta,$$

donde

$$A = \frac{3 + 2 \cos \beta}{4 + \cos \beta}, \quad B = \frac{1 + \cos \beta}{4 + \cos \beta}.$$

De este modo, (A, B) se puede ver como un campo vectorial en el espacio de forma. Tal campo es un “campo gauge”. Él especifica una aplicación lineal de $(d\alpha, d\beta)$ en $d\theta$. Así, es una aproximación de primer orden o derivada de cierta aplicación $\theta(\alpha, \beta)$ que resulta de la conservación del momento angular. En este caso, A, B dependen solamente de β pero, en casos más complejos, se debe esperar que dependa también de α .

Con la relación obtenida se pueden calcular cambios finitos en la orientación que resultan de cambios finitos en la forma. Basta integrar la relación

anterior a lo largo de cierta curva (historia) C que une cierto punto inicial $E_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ en el espacio de forma con otro punto $E_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ en el mismo espacio. Es decir,

$$\Delta\theta = - \int_C (A, B) \cdot (d\alpha, d\beta),$$

donde el punto denota el producto escalar usual. La integral es independiente de la parametrización particular $(\alpha(t), \beta(t))$ de C en función del tiempo. Por ello, se dice que $\Delta\theta$ es una cantidad geométrica.

En el caso en que C es una curva de Jordan suficientemente suave –como en la Figura 1.4–, es posible describirla como la frontera $C = \partial\Omega$ de una región plana simplemente conexa Ω . Entonces, se puede aplicar el Teorema de Green para escribir

$$\Delta\theta = - \oint_{\partial\Omega} (A, B) \cdot (d\alpha, d\beta) = - \iint_{\Omega} \text{rot}(A, B) d\alpha d\beta,$$

donde $\text{rot}(A, B)$ indica la rotacional del campo gauge (A, B) . Es fácil ver que

$$\text{rot}(A, B) = \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\sin \beta}{2(2 + \cos \beta)^2}.$$

Esta rotacional se deja interpretar como un campo vectorial normal al plano de forma o, alternativamente, como una 2-forma diferencial (del tipo de la forma de curvatura) de dicho espacio.

Los ejes del sistema ortonormal que describe este sistema se pueden acomodar de distintas maneras. Por ejemplo, el eje x se puede fijar sobre la primera varilla, entre otras posibilidades. En general, una convención gauge cualquiera se puede escribir como

$$\theta' = \theta + \psi(\alpha, \beta),$$

donde $\psi(\alpha, \beta)$ es cierta función suave (suficientemente diferenciable) de las coordenadas de forma. Esta última ecuación define las transformaciones gauge para el caso que estamos considerando. Con ellas obtenemos

$$d\theta' = d\theta + d\psi = -A d\alpha - B d\beta + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d\beta = -A' d\alpha - B' d\beta,$$

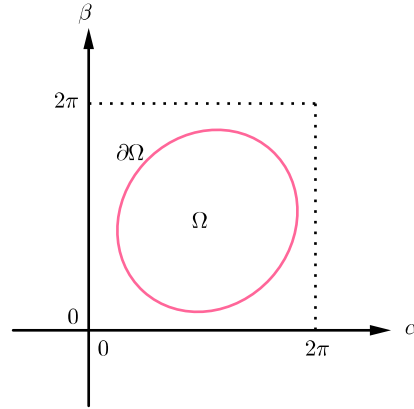


Figura 1.4: Espacio de forma con curva de Jordan $C = \partial\Omega$.

con $A' = A - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, $B' = B - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$. De este modo, repitiendo el procedimiento anterior e integrando a lo largo de una curva de Jordan, se obtiene la integral doble negativa de

$$\text{rot}(A', B') = \text{rot}(A, B) - \text{rot}\nabla\psi = \text{rot}(A, B).$$

En el último paso hemos usado un hecho conocido del Cálculo Vectorial: la rotacional del gradiente $\nabla\psi = (\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\psi}{\partial\beta})$ es nula.

Se concluye que $\Delta\theta$ es invariante bajo las transformaciones de gauge o, en breve, es un “invariante gauge” a lo largo de cada curva de Jordan en el espacio de forma. Si la curva no es cerrada, no podemos concluir la invarianza. Ciertamente, al integrar una curva no cerrada C de $E_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ a $E_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, se obtiene, por el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea que

$$\Delta\theta' = \Delta\theta + \int_C d\psi = \Delta\theta + \psi(\alpha_1, \beta_1) - \psi(\alpha_0, \beta_0).$$

Es decir, en general $\Delta\theta' \neq \Delta\theta$. No tiene sentido preguntar por una rotación de la orientación –como resultado de una historia en el espacio de forma– sino cuando la trayectoria C es cerrada.

CAPÍTULO 2

Cinemática gauge

En este capítulo comenzamos a formalizar matemáticamente algunos conceptos que apenas fueron sugeridos en el capítulo anterior. Desde cierto punto de vista, se trata de una traducción de conceptos físicos en conceptos matemáticos que nos va ayudar a precisar nuestros objetos de trabajo, de una vez por todas. Concretamente, en lo que sigue iniciamos la construcción de un modelo matemático general para las situaciones físicas que nos ocuparon en el Capítulo I y para las que iremos encontrando de ahora en adelante. Por ahora, solamente trataremos los aspectos cinemáticos.

2.1. Espacio de configuración

Informalmente, un espacio de configuración es una manera de visualizar el “estado” de todo un sistema mediante un punto en cierto espacio coordinado conveniente. Los físicos hablan de “coordenadas generalizadas” para significar que el mentado punto no yace necesariamente en un espacio euclidiano, sino –en general– en una variedad diferencial conveniente. Así pues, formalmente, un espacio de configuración es una variedad diferencial.

Para nosotros, de ahora en adelante, el “estado” va a estar formado por las posiciones de tres masas puntuales que forman un sistema sobre una

superficie. En nuestro lenguaje, la variedad de configuración es una superficie riemanniana, es decir, una variedad diferencial bidimensional sobre los reales provista de un tensor métrico o “primera forma fundamental”. Dicho tensor permite hacer mediciones de longitudes, ángulos y áreas, de ahí el calificativo de “métrico”. Asumimos que el lector está familiarizado con la teoría elemental de estas superficies, tal como se presenta en Do Carmo (1976) o en Solanilla (2008).

El sistema de partículas al que nos referimos sistema se va a ir definiendo con precisión a lo largo del capítulo.

Para los propósitos prácticos que aquí interesan, nos ubicamos en una vecindad normal V de un punto P en una superficie riemanniana S . Es bien sabido que los puntos de V se pueden describir mediante coordenadas locales ortogonales (u, v) . Es decir, podemos identificar a V (mediante difeomorfismo) con un subconjunto abierto del plano de coordenadas cartesianas ortogonales. De este modo, la primera forma fundamental se expresa como

$$g = Edu^2 + Gdv^2,$$

para ciertas funciones diferenciables $E = E(u, v)$ y $G = G(u, v)$ de las coordenadas (u, v) . Además, la curvatura está dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right),$$

en virtud del Teorema Egregio de Gauss. Los subíndices indican derivación parcial. Por ejemplo, $E_v = \frac{\partial E}{\partial v}$. Asimismo, como alternativa simplificadora, se pueden usar coordenadas isotérmicas en V . En ellas, $E = G = \lambda(u, v)$ y la curvatura toma la forma

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda,$$

donde Δ denota al operador laplaciano

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

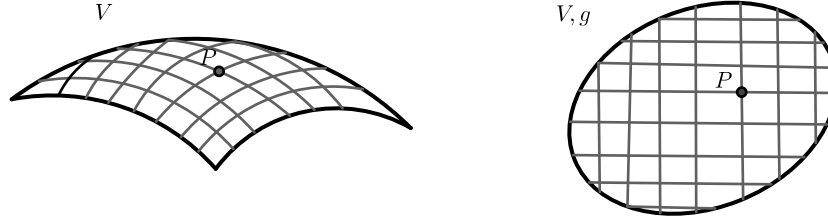


Figura 2.1: Dos maneras de entender la vecindad normal V .

A conveniencia, para los movimientos que vamos a considerar aquí, la coordenada u permanecerá fija. Con esto, se “amarra” o fija el cuerpo a la superficie de una manera similar al capítulo anterior, cuando se fijaba una juntura del cuerpo al sistema inercial. Esto simplifica nuestra tarea puesto que evita la eliminación de algunos grados de libertad asociados a las traslaciones, *cf.* Littlejohn & Reinsch (1997). Con el fin de evitar modos de hablar ambiguos –en relación con las rotaciones y traslaciones– no usaremos el concepto de espacio de orientación y nos referiremos simplemente a las coordenadas locales (u, v) del espacio de configuración. La Figura 2.1 ilustra dicho espacio. Este proceder tiene la ventaja adicional de evitar la consideración del centro de masa del cuerpo, un concepto que presenta dificultades para definirse de manera natural sobre un espacio curvo, *cf.* Avron y Kenneth (2006, p. 3).

2.2. Sistema (rana) y espacio de forma

A continuación describimos el sistema deformable que tratamos en este trabajo. El cuerpo consta de tres extremidades deformables sin masa significativa unidas en un punto $P \in V \subset S$. Ellas forman una figura que evoca la letra T, o un trípode, de tal manera que dos de ellas –o piernas de igual longitud– se encuentran en la única juntura, de donde sale la tercera

—o tronco—, que puede tener longitud diferente a éstas. Las dos primeras se extienden a partir de P sobre una curva geodésica en $V \subset S$ y la tercera sale de P ortogonalmente a dicha geodésica, sobre otra geodésica de la vecindad normal. En la punta libre de cada extremidad hay una masa de valor m . No sobra insistir en que todo el sistema está contenido en V . Llamaremos “rana” al cuerpo formado de esta manera. La situación se resume en la Figura 2.2.

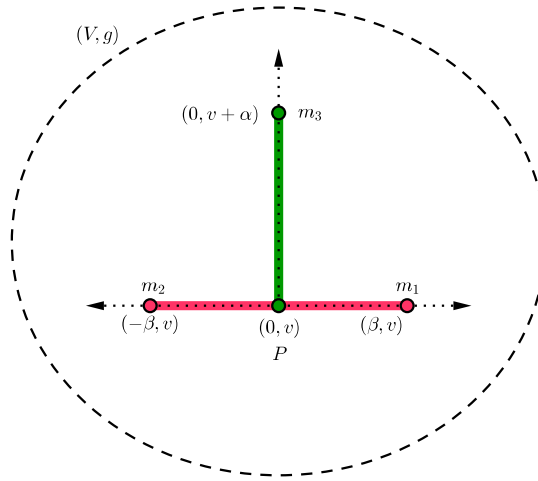


Figura 2.2: Cuerpo deformable o rana.

El ángulo recto formado por el tronco en su pie P es indeformable. La longitud de las piernas puede cambiar simétricamente con respecto a la juntura, es decir, la longitud de las dos piernas será siempre igual. La longitud del tronco también es variable e independiente de la longitud de las piernas. Las piernas y el tronco siempre yacen completamente siempre sobre geodésicas en la vecindad V del punto P . De nuevo, la rana es pequeña con relación a toda la superficie (*small swimmer*, en inglés).

Desde las matemáticas, un espacio de forma es una parametrización alternativa del espacio de configuración. Es decir, las coordenadas de forma constituyen un cambio lícito de coordenadas de las coordenadas de configuración (Laugwitz, 1960; pp. 22 y 23). Por ello, el espacio de forma es, de

nuevo una variedad diferencial. El verdadero significado práctico se revela en la Física, en donde el espacio de forma representa una manera alterna y simplificadora de describir el sistema bajo estudio. En general, elegir un espacio de forma sencillo y pertinente no es cosa fácil. La elección depende a menudo de la experiencia del matemático o del físico. En los casos contemplados en este trabajo, tales elecciones no son muy complicadas.

Para el caso que nos ocupa (rana), las coordenadas del espacio de forma serán

$$\begin{aligned}\alpha & : \text{ longitud del tronco,} \\ \beta & : \text{ longitud de una pierna.}\end{aligned}$$

α y β yacen en un rectángulo acotado que garantiza que ninguna parte del cuerpo se sale de la vecindad normal V de la superficie. El espacio de forma α, β es un espacio euclidiano usual provisto de coordenadas cartesianas ortogonales y de la métrica usual. La situación se esboza en la Figura 2.3.

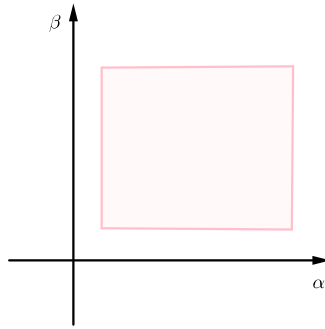


Figura 2.3: Espacio de forma para la rana.

Dada la forma del sistema, conviene ubicar el tronco y las piernas respectivamente sobre los ejes coordenados v y u con la juntura en el punto $(0, v(t))$, tomando el valor fijo $u = 0$. Las coordenadas de las masas como

funciones del tiempo t , están dadas entonces por

$$\begin{aligned}(u_1(t), v_1(t)) &= (\beta(t), v(t)), \\ (u_2(t), v_2(t)) &= (-\beta(t), v(t)), \\ (u_3(t), v_3(t)) &= (0, v(t) + \alpha(t)).\end{aligned}$$

Los subíndices 1 y 2 señalan las piernas; el subíndice 3, el tronco. V. Figura 2.2.

En consecuencia, las normas al cuadrado de las velocidades de estas tres masas son

$$\begin{aligned}\|w_1\|^2 &= \langle w_1, w_1 \rangle_g = \dot{\beta}^2 E(\beta, v) + \dot{v}^2 G(\beta, v), \\ \|w_2\|^2 &= \langle w_2, w_2 \rangle_g = \dot{\beta}^2 E(-\beta, v) + \dot{v}^2 G(-\beta, v), \\ \|w_3\|^2 &= \langle w_3, w_3 \rangle_g = (\dot{v} + \dot{\alpha})^2 G(0, v + \alpha).\end{aligned}$$

Se entiende que todas las variables que aparecen aquí dependen de t . La derivada con respecto a t se denota con un punto sobre la letra correspondiente. El subíndice g quiere decir que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el determinado por el tensor métrico, evaluado en el punto donde se sitúa la masa.

En coordenadas isotérmicas, $E = G = \lambda$ y estas expresiones se simplifican así:

$$\begin{aligned}\|w_1\|^2 &= (\dot{\beta}^2 + \dot{v}^2)\lambda(\beta, v), \\ \|w_2\|^2 &= (\dot{\beta}^2 + \dot{v}^2)\lambda(-\beta, v), \\ \|w_3\|^2 &= (\dot{v} + \dot{\alpha})^2\lambda(0, v + \alpha).\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Dinámica gauge

Considerados los aspectos cinemáticos, debemos pasar a los dinámicos. Para este fin, usaremos lo que los físicos llaman formalismo lagrangiano para la Mecánica Clásica. Desde el punto de vista matemático, se trata de un problema particular del Cálculo de Variaciones. Asumimos que el lector está familiarizado con estos resultados, tal como se explican, por ejemplo en Gelfand & Fomin (1963).

3.1. Lagrangiano y acción mínima

El lagrangiano para el sistema que hemos llamado rana está dado por

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\|w_1\|^2 + \frac{1}{2}m\|w_2\|^2 + \frac{1}{2}m\|w_3\|^2 - U,$$

donde T es la energía cinética del sistema y U es su energía potencial. De manera análoga al Capítulo 1 suponemos que sobre el sistema no actúan fuerzas externas y que todas las fuerzas internas se deben a los músculos –o algo parecido– en la rana. No hay torques externos tampoco. La rana se deforma estirando las piernas y el tronco, en un movimiento cíclico, de tal manera que su forma sigue la frontera del rectángulo en la Figura 2.3. La forma inicial y final son iguales.

Así pues, con lo obtenido en el capítulo anterior,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}m \left(\dot{\beta}^2 E(\beta, v) + \dot{v}^2 G(\beta, v) + \dot{\beta}^2 E(-\beta, v) + \dot{v}^2 G(-\beta, v) \right. \\ & \left. + (\dot{v} + \dot{\alpha})^2 G(0, v + \alpha) \right), \end{aligned}$$

dado que $U = 0$. También, en coordenadas isotérmicas,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left((\dot{\beta}^2 + \dot{v}^2)\lambda(\beta, v) + (\dot{\beta}^2 + \dot{v}^2)\lambda(-\beta, v) + (\dot{v} + \dot{\alpha})^2\lambda(0, v + \alpha) \right).$$

Una importante y conocida aplicación del Cálculo de Variaciones a la Mecánica Clásica, *e. g.* Gelfand & Fomin (1963, p. 84), permite encontrar una condición sobre la solución al problema del movimiento del sistema:

Teorema 3.1 (Principio de la acción mínima). *El movimiento de la rana durante un intervalo finito de tiempo está descrito por las funciones $(u_1(t), v_1(t)), (u_2(t), v_2(t)), (u_3(t), v_3(t))$ para las cuales la integral*

$$\int \mathcal{L} dt,$$

llamada acción, alcanza un mínimo.

La determinación del mínimo depende, en general, de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange asociado a este problema. Este camino, un poco complicado en nuestro caso, se puede obviar recurriendo a una especie de simetría de la vecindad normal V , que contiene a la rana.

3.2. Teorema de Noether

Sea $M = V \times J$ el producto cartesiano de la vecindad V con un intervalo abierto J del eje real, entendido como eje temporal. Sea TM su fibrado tangente. Con esto, el lagrangiano se deja entender como una función suave

$\mathcal{L} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de TM en los números reales. Sea $h : M \rightarrow M$ un difeomorfismo cualquiera. Decimos que el par (M, \mathcal{L}) es invariante bajo h si

$$\mathcal{L}(h(x), dh(w_x)) = \mathcal{L}(x, w_x), \quad (3.1)$$

para todo $(x, w_x) \in TM$. La aplicación $dh : TM \rightarrow TM$ es la derivada de h .

La idea principal de lo que sigue es considerar una familia de difeomorfismos $h : M \rightarrow M$ que reporte alguna noción de simetría para M . En primera instancia, se podría exigir que dicha familia sea un grupo de difeomorfismos. Esto, sin embargo, no se puede garantizar siempre para nuestro problema. Por este motivo, se debe usar aquí una herramienta más fina.

Sea I un intervalo abierto de la recta real que contiene al cero. Una familia indexada $\{h_\epsilon\}_{\epsilon \in I}$, de difeomorfismos de M , se llama uniparamétrica si

- a) la expresión h_ϵ es diferenciable con respecto a ϵ
- b) $h_0(P) = P$, para todo $P \in V$.

Afortunadamente, el Teorema de Noether del Cálculo de Variaciones se verifica para familias uniparamétricas de difeomorfismos. Para lo que sigue, nos valdremos de la siguiente versión de este célebre resultado.

Teorema 3.2 (de Noether). *Supongamos que (V, \mathcal{L}) es invariante bajo una familia uniparamétrica $\{h_\epsilon\}_{\epsilon \in I}$ de difeomorfismos. Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución garantiza que la acción*

$$\int \mathcal{L} dt$$

alcanza un mínimo posee una integral primera, o sea, una función que permanece constante a lo largo del mentado mínimo. En concreto, si la familia de difeomorfismos se deja escribir convenientemente, mediante aplicaciones diferenciables Φ, Ψ, Υ , en la forma

$$h_\epsilon(t, u, v) = (t^*, u^*, v^*) = (\Phi(t, u, v; \epsilon), \Psi(t, u, v; \epsilon), \Upsilon(t, u, v; \epsilon)),$$

la integral primera (cantidad constante o conservada) vendrá dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}(0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \frac{\partial \Upsilon}{\partial \epsilon}(0) + \left(\mathcal{L} - \dot{u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} - \dot{v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(0).$$

La demostración de estos hechos se puede consultar en el texto de Gelfand & Fomin (1963, p. 81 y siguientes) o en el artículo de De Souza e Rodrigues (1986). Resaltamos que no se necesita la invarianza bajo todo un grupo de simetrías, sino solamente bajo una familia uniparamétrica de difeomorfismos.

Ahora bien, tal familia se puede construir siempre en la vecindad V de la superficie de configuración. Se trata de un hecho conocido de la teoría general de las variedades diferenciales cuya demostración se puede consultar, por ejemplo, en Malliavin (1972; II, 2). En efecto, por integración de un campo vectorial sobre V a lo largo de la geodésica relativa a v , se obtiene la familia uniparamétrica de difeomorfismos $h_\epsilon(t, u, v) = (\Phi, \Psi, \Upsilon)$ tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon}(0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial \epsilon}(0) = 1.$$

En consecuencia, el *momentum* o cantidad de movimiento

$$P_v := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}$$

se conserva. Si suponemos que la rana está inicialmente en reposo, $P_v \equiv 0$ a lo largo del movimiento. Los cálculos correspondientes arrojan que

$$P_v = m(\dot{v}G(\beta, v) + \dot{v}G(-\beta, v) + (\dot{v} + \dot{\alpha})G(0, v + \alpha)).$$

En coordenadas isotérmicas,

$$P_v = m(\dot{v}\lambda(\beta, v) + \dot{v}\lambda(-\beta, v) + (\dot{v} + \dot{\alpha})\lambda(0, v + \alpha)).$$

Suponiendo que la rana está inicialmente en reposo, $P_v = 0$ y, en consecuencia,

$$\dot{v} = -\frac{\dot{\alpha} \cdot G(0, v + \alpha)}{G(\beta, v) + G(-\beta, v) + G(0, v + \alpha)}.$$

Respectivamente,

$$\dot{v} = -\frac{\dot{\alpha} \cdot \lambda(0, v + \alpha)}{\lambda(\beta, v) + \lambda(-\beta, v) + \lambda(0, v + \alpha)}.$$

Como un caso particular de estas expresiones, podemos citar el movimiento estudiado por Cuellar (2015) en la esfera.

Ejemplo 3.3. *Se toma como superficie a la esfera de radio R parametrizada por coordenadas geográficas u (latitud) y v (longitud). Como es bien sabido, los coeficientes de la primera forma fundamental están dados usualmente por*

$$E(u, v) = R^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = R^2 \cos^2 u.$$

De la expresión anterior, en cuanto forma diferencial,

$$dv = -\frac{R^2 d\alpha}{2R^2 \cos^2 \beta + R^2} = -\frac{d\alpha}{2 \cos^2 \beta + 1} = \left(-\frac{1}{2 + \cos 2\beta} \right) \cdot d\alpha + 0 \cdot d\beta.$$

Luego de integrar y aplicar el Teorema de Green al lado derecho,

$$\delta v = \iint_{\square} \frac{2 \cdot \sin 2\beta}{(2 + \cos 2\beta)^2} d\alpha d\beta,$$

donde \square indica el (interior del) rectángulo (en el espacio de forma) mostrado en la Figura 2.3. Escogiendo a conveniencia los valores de β en dicho rectángulo, obtenemos un cambio finito δv . De esta manera, se prueba que la natación de la rana produce una salida del reposo en ausencia de fuerzas externas.

Este resultado es independiente de la elección particular del sistema de coordenadas locales. Por ejemplo, si la coordenada de las masas puntuales se cambian a

$$\begin{aligned} (u_1(t), v_1(t)) &= (u(t) + \beta(t), v(t)), \\ (u_2(t), v_2(t)) &= (u(t) - \beta(t), v(t)), \\ (u_3(t), v_3(t)) &= (u(t), v(t) + \alpha(t)). \end{aligned}$$

entonces se obtienen el mismo resultado mencionado anteriormente.

El ejemplo anterior se puede generalizar en el caso en que el coeficiente $G(u, v) = G(u)$. Es decir, G depende solamente de u . Para resolver el caso general, debemos emplear una aproximación distinta al problema, que tenga en cuenta las hipótesis o supuestos que todavía no se han explicitado.

CAPÍTULO 4

Convención gauge

De un lado, caemos en cuenta de que no tenemos ninguna noción de convención gauge. De otro lado, el trabajo de Cuellar (2015) revela que, para obtener resultados interesantes, es preciso aproximar linealmente a conveniencia, con criterios sólidos. En este capítulo resolvemos este par de tareas pendientes.

4.1. Nuevo sistema (lagartija)

Con el fin de introducir ciertas simetrías simplificadoras, consideramos de ahora en adelante un cuerpo de cuatro extremidades deformables (sin masa significativa) unidas en un punto determinado P , de coordenadas (u_0, v_0) , en una vecindad normal V de una superficie S . La figura se asemeja a un signo $+$, o a una cruz. Dos extremidades o piernas se extienden en direcciones opuestas a partir de P sobre una curva geodésica en $V \subset S$. Las otras dos se extienden también en direcciones opuestas desde P , ortogonalmente a la primera geodésica. Se pueden llamar tronco y cola. En la punta libre de cada extremidad hay una masa de valor m . Todo el sistema está contenido en V (*small swimmer*). Llamaremos “lagartija” al cuerpo formado de esta manera. La situación se resume en la Figura 4.1.

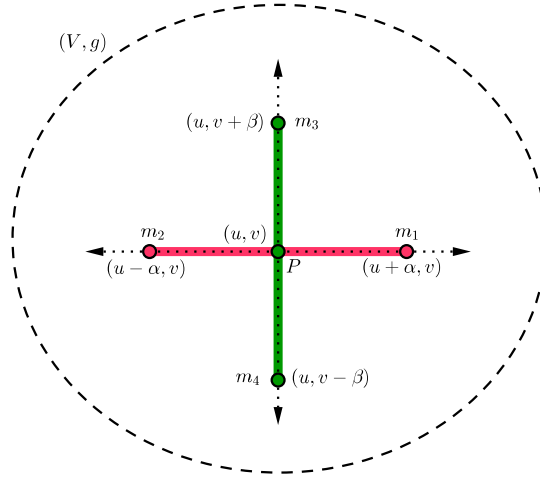


Figura 4.1: Lagartija.

El ángulo recto formado por la geodésica de las piernas y la geodésica del tronco-cola en P es indeformable. La longitud de las piernas puede cambiar simétricamente con respecto a la juntura, es decir, la longitud de las dos piernas será siempre igual. La longitud del tronco y la cola también es variable e independiente de la longitud de las piernas. En cada momento el tronco y la cola miden lo mismo.

Como coordenadas del espacio de forma tomamos

- α : longitud común a las piernas,
- β : longitud común al tronco y la cola.

α y β yacen en un rectángulo acotado que garantiza que ninguna parte del cuerpo se sale de la vecindad normal V de la superficie. El espacio de forma α, β es, por ahora, similar al anterior para la rana, aunque pronto haremos algunas precisiones al respecto. La situación se sugiere en la Figura 4.2. Los valores iniciales de α, β son α_0, β_0 , respectivamente. La lagartija realiza el movimiento cíclico de estirar y recoger sus piernas y su tronco-cola siguiendo un rectángulo en el espacio de forma, tal como se sugiere en la Figura 4.2.

Todas las fuerzas son internas, debidas a musculos o motores, por ejemplo. No hay fuerzas externas ni torques externos. Después de un ciclo, la lagartija regresa a su posición inicial.

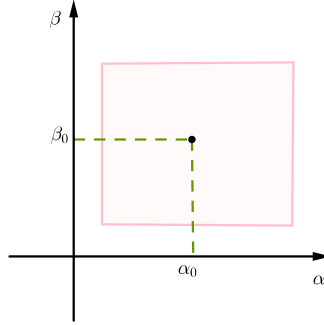


Figura 4.2: Espacio de forma para la lagartija.

El lagrangiano correspondiente es, en coordenadas ortogonales,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{m}{2} (E(u - \alpha, v)(\dot{u} - \dot{\alpha})^2 + G(u - \alpha, v)\dot{v}^2 \\
 & + E(u + \alpha, v)(\dot{u} + \dot{\alpha})^2 + G(u + \alpha, v)\dot{v}^2 \\
 & + E(u, v - \beta)\dot{u}^2 + G(u, v - \beta)(\dot{v} - \dot{\beta})^2 \\
 & + E(u, v + \beta)\dot{u}^2 + G(u, v + \beta)(\dot{v} + \dot{\beta})^2).
 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Noether, consideradas familias adecuadas de difeomorfismos, las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\dot{u}} &= m(E(u - \alpha, v)(\dot{u} - \dot{\alpha}) + E(u + \alpha, v)(\dot{u} + \dot{\alpha}) \\
 &+ E(u, v - \beta)\dot{u} + E(u, v + \beta)\dot{u}) = 0, \\
 \mathcal{L}_{\dot{v}} &= m(G(u, v - \beta)(\dot{v} - \dot{\beta}) + G(u, v + \beta)(\dot{v} + \dot{\beta}) \\
 &+ G(u - \alpha, v)\dot{v} + G(u + \alpha, v)\dot{v}) = 0.
 \end{aligned}$$

se conservan porque se parte del reposo. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 & (E(u - \alpha, v) + E(u + \alpha, v) + E(u, v - \beta) + E(u, v + \beta)) \dot{u} \\
 & = (E(u - \alpha, v) - E(u + \alpha, v)) \dot{\alpha}, \\
 & (G(u, v - \beta) + G(u, v + \beta) + G(u - \alpha, v) + G(u + \alpha, v)) \dot{v} \\
 & = (G(u, v - \beta) - G(u, v + \beta)) \dot{\beta}.
 \end{aligned}$$

En otros términos,

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \frac{E(u - \alpha, v) - E(u + \alpha, v)}{E(u - \alpha, v) + E(u + \alpha, v) + E(u, v - \beta) + E(u, v + \beta)} \dot{\alpha}, \\
 \dot{v} &= \frac{G(u, v - \beta) - G(u, v + \beta)}{G(u, v - \beta) + G(u, v + \beta) + G(u - \alpha, v) + G(u + \alpha, v)} \dot{\beta}.
 \end{aligned}$$

Obtenemos, de nuevo, un sistema diferencial en las variables u, v, α, β y no se ve vislumbra una manera de separar u, v de α, β , como quisiéramos.

Ante esta dificultad, recurrimos al Análisis Numérico. En primera instancia, podríamos buscar soluciones numéricas aproximadas integrando nuestro sistema de ecuaciones diferenciales con ayuda de algún programa en una computadora digital. Sin embargo, por la naturaleza de este trabajo de grado, optamos más bien por una salida más heurística, más discursiva, si se quiere.

4.2. Linealización

En concordancia, a continuación emprendemos la tarea de modificar las ecuaciones diferenciales anteriores con el fin de obtener, al final, una “buena” aproximación a ellas. Esperamos, por cierto, que dicha aproximación nos ayude a comprender mejor el problema de la natación de la lagartija. En otras palabras, aspiramos que no se pierda “muchísima información importante” al hacer las modificaciones.

La modificación consta de cuatro pasos. Cada paso va acompañado de una justificación para cambiar algo. Estos pasos son

1. Fijemos un punto (u_0, v_0) en la vecindad normal V , por ejemplo la posición inicial del punto P en la lagartija. Puesto que todos los puntos (u, v) de V son cercanos, cambiamos el sistema original por

$$\begin{aligned}\dot{u} &\approx \frac{E(u_0 - \alpha, v_0) - E(u_0 + \alpha, v_0)}{E(u_0 - \alpha, v_0) + E(u_0 + \alpha, v_0) + E(u_0, v_0 - \beta) + E(u_0, v_0 + \beta)} \dot{\alpha}, \\ \dot{v} &\approx \frac{G(u_0, v_0 - \beta) - G(u_0, v_0 + \beta)}{G(u_0, v_0 - \beta) + G(u_0, v_0 + \beta) + G(u_0 - \alpha, v_0) + G(u_0 + \alpha, v_0)} \dot{\beta}.\end{aligned}$$

De paso, se han separado las variables u, v de α, β (u_0, v_0 son constantes). El signo \approx indica que se trata de una aproximación.

2. Con esto, podemos dar una estructura de superficie riemanniana al espacio de forma. Ponemos simplemente (*v.* Figura 4.2)

$$E(\alpha + \alpha_0, \beta + \beta_0) := E(u_0 + \alpha, v_0 + \beta) \text{ y } G(\alpha + \alpha_0, \beta + \beta_0) := G(u_0 + \alpha, v_0 + \beta).$$

Las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned}\dot{u} &\approx \frac{E(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) - E(\alpha + \alpha_0, \beta_0)}{E(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) + E(\alpha + \alpha_0, \beta_0) + E(\alpha_0, -\beta + \beta_0) + E(\alpha_0, \beta + \beta_0)} \dot{\alpha}, \\ \dot{v} &\approx \frac{G(\alpha_0, -\beta + \beta_0) - G(\alpha_0, \beta + \beta_0)}{G(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) + G(\alpha + \alpha_0, \beta_0) + G(\alpha_0, -\beta + \beta_0) + G(\alpha_0, \beta + \beta_0)} \dot{\beta}.\end{aligned}$$

Ahora el sistema diferencial luce mucho mejor.

3. Los coeficientes de la primera forma en el espacio de forma se pueden aproximar por un polinomio de Taylor de primer grado (aproximación lineal) en torno al punto (α_0, β_0) :

$$\begin{aligned}E(\mp\alpha + \alpha_0, \beta_0) &\approx E(\alpha_0, \beta_0) \mp \alpha E_\alpha(\alpha_0, \beta_0), \\ G(\mp\alpha + \alpha_0, \beta_0) &\approx G(\alpha_0, \beta_0) \mp \alpha G_\alpha(\alpha_0, \beta_0), \\ E(\alpha_0, \mp\beta + \beta_0) &\approx E(\alpha_0, \beta_0) \mp \beta E_\beta(\alpha_0, \beta_0), \\ G(\alpha_0, \mp\beta + \beta_0) &\approx G(\alpha_0, \beta_0) \mp \beta G_\beta(\alpha_0, \beta_0).\end{aligned}$$

Los subíndices α, β denotan derivación parcial. Luego de remplazar en

las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}\dot{u} &\approx -\alpha \cdot \frac{E_\alpha(\alpha_0, \beta_0)}{2E(\alpha_0, \beta_0)} \dot{\alpha}, \\ \dot{v} &\approx -\beta \cdot \frac{G_\beta(\alpha_0, \beta_0)}{2G(\alpha_0, \beta_0)} \dot{\beta}.\end{aligned}$$

4. Por último, se fija el valor de las variables α, β en un punto y se dejan variar las constantes α_0, β_0 :

$$\begin{aligned}\dot{u} &\approx -\alpha_0 \cdot \frac{E_\alpha(\alpha, \beta)}{2E(\alpha, \beta)} \dot{\alpha} = -\alpha_0 \cdot \frac{E_\alpha}{2E} \dot{\alpha}, \\ \dot{v} &\approx -\beta_0 \cdot \frac{G_\beta(\alpha, \beta)}{2G(\alpha, \beta)} \dot{\beta} = -\beta_0 \cdot \frac{G_\beta}{2G} \dot{\beta}.\end{aligned}$$

Los pasos 1 y 3 son bastante evidentes por sí mismos. El paso 2 demanda una reflexión adicional. En efecto, estamos suponiendo la existencia de una función biyectiva $(u, v) \mapsto (\alpha, \beta)$, de (un subconjunto abierto de) V sobre cierto abierto de la superficie α, β . O sea, esta función aplica biyectivamente coordenadas de configuración sobre coordenadas de forma. Por lo tanto, se trata de una convención gauge para el problema que nos ocupa. El paso 4 puede entenderse como un deshacer o desandar el paso 1, como un regreso de los valores fijos a los valores variables.

CAPÍTULO 5

Epílogo: curvatura gaussiana

Las ecuaciones diferenciales aproximadas al final del capítulo anterior permiten llevar a buen término este trabajo. Por un lado, se demuestra la salida del reposo para el sistema de partículas que llamamos lagartija; por otro lado, se prueba que la magnitud de traslación producida por el movimiento cíclico de la forma es –aproximadamente– directamente proporcional a la curvatura gaussiana en el punto donde se sitúa la lagartija. Veamos.

5.1. Salida del reposo

Cada una de las cuatro aproximaciones sucesivas del capítulo anterior, permite escribir la suma de formas diferenciales du y dv en la forma

$$du + dv \approx d\gamma := Ad\alpha + Bd\beta.$$

Las funciones A, B conforman las componentes de un campo vectorial en el espacio de forma al que los físicos suelen llamar potencial gauge. A continuación se enumeran las cuatro alternativas mencionadas para dicho potencial gauge.

1. En primera aproximación,

$$\begin{aligned} A &= \frac{E(u_0 - \alpha, v_0) - E(u_0 + \alpha, v_0)}{E(u_0 - \alpha, v_0) + E(u_0 + \alpha, v_0) + E(u_0, v_0 - \beta) + E(u_0, v_0 + \beta)}, \\ B &= \frac{G(u_0, v_0 - \beta) - G(u_0, v_0 + \beta)}{G(u_0, v_0 - \beta) + G(u_0, v_0 + \beta) + G(u_0 - \alpha, v_0) + G(u_0 + \alpha, v_0)}. \end{aligned}$$

2. En segunda aproximación,

$$\begin{aligned} A &= \frac{E(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) - E(\alpha + \alpha_0, \beta_0)}{E(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) + E(\alpha + \alpha_0, \beta_0) + E(\alpha_0, -\beta + \beta_0) + E(\alpha_0, \beta + \beta_0)}, \\ B &= \frac{G(\alpha_0, -\beta + \beta_0) - G(\alpha_0, \beta + \beta_0)}{G(-\alpha + \alpha_0, \beta_0) + G(\alpha + \alpha_0, \beta_0) + G(\alpha_0, -\beta + \beta_0) + G(\alpha_0, \beta + \beta_0)}. \end{aligned}$$

3. En tercera aproximación,

$$\begin{aligned} A &= -\alpha \cdot \frac{E_\alpha(\alpha_0, \beta_0)}{2E(\alpha_0, \beta_0)}, \\ B &= -\beta \cdot \frac{G_\beta(\alpha_0, \beta_0)}{2G(\alpha_0, \beta_0)}. \end{aligned}$$

4. Y, en cuarta aproximación,

$$\begin{aligned} A &= -\alpha_0 \cdot \frac{E_\alpha}{2E}, \\ B &= -\beta_0 \cdot \frac{G_\beta}{2G}. \end{aligned}$$

En cualquiera de estas instancias, dado que el espacio de forma está dotado de un tensor métrico y se puede orientar localmente, se puede operar con la estrella de Hodge para obtener la 1-forma diferencial

$$\star d\gamma = -Bd\alpha + Ad\beta.$$

La integración a lo largo de la frontera del rectángulo en el espacio de forma se puede realizar con el Teorema de Green:

$$\oint_{\partial\Box} -Bd\alpha + Ad\beta = \iint_{\Box} (A_\alpha + B_\beta) d\alpha d\beta.$$

Los subíndices señalan derivación parcial. Cuando el rectángulo \Box del espacio α, β se elige convenientemente, la integral de la derecha es distinta de cero. Así se prueba la salida del reposo del sistema o lagartija para las aproximaciones de más arriba.

5.2. Curvatura geodésica

En la cuarta aproximación podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_0 = \beta_0$. A este valor constante lo denotaremos como θ_0 . De esta manera,

$$\star(du + dv) \approx \star d\gamma = \theta_0 \cdot \left(-\frac{G_\beta}{2G} d\alpha + \frac{E_\alpha}{2E} d\beta \right).$$

Para mayor simplicidad, podemos introducir ahora coordenadas isotérmicas, para las cuales $E = G = \lambda$. Con esto,

$$\star d\gamma = \frac{\theta_0}{2} \cdot \left(-\frac{\lambda_\beta}{\lambda} d\alpha + \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} d\beta \right),$$

en donde reconocemos a la forma diferencial de la curvatura geodésica de la superficie (expresión entre paréntesis, a la derecha). Con esto alcanzamos el objetivo general de este trabajo. En efecto, basta derivar externamente para obtener

$$\begin{aligned} d(\star d\gamma) &= -\frac{\theta_0}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\lambda_\beta}{\lambda} \right) d\alpha \wedge d\beta \\ &= -\frac{\theta_0}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log \lambda + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log \lambda \right) d\alpha \wedge d\beta \\ &= -\frac{\theta_0}{2} \cdot \Delta \log \lambda \, d\alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Normalizando ahora entre el coeficiente métrico,

$$\frac{d(\star d\gamma)}{\lambda} = -\frac{\theta_0}{2\lambda} \cdot \Delta \log \lambda \, d\alpha d\beta = \theta_0 \cdot K \, d\alpha \wedge d\beta,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie de forma. Por el Teorema Egregio de Gauss, esta curvatura es una cantidad de la geometría intrínseca-métrica de esta superficie y es igual, bajo la isometría de nuestra convención gauge, a la curvatura gaussiana de la superficie de configuración.

Integrando esta última expresión llegamos a nuestro resultado.

Teorema 5.1. *Bajo las aproximaciones de la Sección 4.2, la magnitud de traslación resultante del movimiento cíclico de las piernas y el tronco-cola de la lagartija en una superficie riemanniana se puede aproximar por*

$$\theta_0 \iint_{\square} K \, d\alpha \wedge d\beta.$$

Corolario 5.2. *Existe un punto $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \square$ tal que esta aproximación es igual a*

$$\theta_0 \cdot K(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \cdot c^2,$$

donde c^2 denota el área de \square .

Demostración. Basta aplicar el Teorema del Valor Medio a la integral doble.

□

A manera de conclusión

El resultado principal del trabajo ha sido la demostración de que, bajo ciertas hipótesis simplificadoras, la traslación neta de la lagartija es directamente proporcional a la curvatura gaussiana de la superficie. Las aproximaciones o simplificaciones son necesarias como consecuencia de dos hechos irreconciliables:

- En el sistema o lagartija las masas están concentradas en un número finito de puntos, es decir, el sistema es discreto.
- La curvatura de Gauss, de otro lado, es un concepto continuo, o sea, no discreto.

Esta dificultad insalvable se podría corregir, en principio, considerando un sistema cuya masa esté distribuida de manera continua. Valdría la pena explorar esta posibilidad en el futuro.

En relación con lo anterior, la convención gauge usada en el trabajo no tiene sentido sino para la aproximación. Dicha convención es correcta puesto que el desplazamiento total del sistema es un “invariante gauge”: cualquier otra transformación que cumpla con los requisitos estipulados produce el desplazamiento mencionado.


Para obtener la proporcionalidad directa entre la traslación y la curvatura fue necesario suponer una simetría entre la deformación de las piernas y la deformación del tronco-cola. Queda también pendiente la tarea de estudiar el caso en que tal simetría no se verifique.

Por último, la aplicación del Teorema de Noether contiene una sutileza. En verdad, la existencia de las familias uniparamétricas de difeomorfismos encierra la ausencia de fuerzas externas.

Bibliografía

- [1] Avron J. E. & Kenneth, O. (2006) Swimming in curved space or the Baron and the cat. *New Journal of Physics*, Vol. 8, 1-15.
- [2] Cherman A., Delgado J., Duda, F., Ehlers, K., Koiller, J. & Montgomery, R. (2000) Low Reynolds Number Swimming in Two Dimensions. *Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics*, Proceedings of the III International Symposium, 7-11 December 1998, Pátzcuaro, México. Edited by J. Delgado, E. A. Lacomba *et al.*. World Scientific Publishing, 32-62.
- [3] De Sousa, Q. A. e Rodrigues, W. A. (1986) A Comment on the Proof of Noether's Theorem in Smooth Manifolds. *Revista Brasileira de Física*, Vol. 16, No. 4, 1-9.
- [4] Cuellar, D. A. (2015) *Geometría del movimiento de cuerpos deformables en superficies curvas*. Ibagué: Universidad del Tolima (trabajo de grado del Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística).
- [5] Do Carmo, M. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- [6] Gelfand, I. M. & Fomin, S. V. (1963) *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc.
- [7] Laugwitz, D. (1960) *Differentialgeometrie*. Stuttgart: Teubner.

-
- [8] Littlejohn, R. G. & Reinsch, M. (January 1997) Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n -body problem. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 69, No. 1, 213-275.
 - [9] Solanilla, L. (2008) *Geometría diferencial de superficies*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
 - [10] Wisdom, J. (2003) Swimming in Spacetime: Motion by Cyclic Changes in Body Shape. *Science*, Vol. 299, 1865-1869.

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de febrero de 2017

Los suscritos:		
Yessica Paola Velasco Bonilla	con C.C N°	1110529059
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar ☒

No Autorizar ☐ Motivo:

La consulta en físico y la virtualización de mi OBRA, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

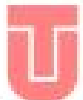
Manifiestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	<input checked="" type="checkbox"/>	Artículo	<input type="checkbox"/>	Proyecto de Investigación	<input type="checkbox"/>
Libro	<input type="checkbox"/>	Parte de libro	<input type="checkbox"/>	Documento de conferencia	<input type="checkbox"/>
Patente	<input type="checkbox"/>	Informe técnico	<input type="checkbox"/>		
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					<input type="checkbox"/>

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que, con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 2 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de febrero de 2017

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “...*Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable*” y 37 “...*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo: **NATACIÓN EN SUPERFICIES CURVAS: UNA JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA**

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA


- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Artículo publicado en revista:

- Capítulo publicado en libro:

- Conferencia a la que se presentó:

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 3 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **23** Mes: **ENERO** Año: **2018**

Autores:

Firma

Nombre:	YESSICA PAOLA VELASCO	<i>Yessica Paola Velasco</i>	c.c.	1110529059
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.